

Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion.

Von

Rózsa Péter (Pólitzer) in Budapest.

Einleitung.

I.

1. Die wichtigste Eigenschaft der Gesamtheit der natürlichen Zahlen ist, daß man über eine noch so große Zahl n immer noch um 1 weitergehen kann. Dieses Um-1-noch-weitergehen bildet daher auch die wichtigste Methode der elementaren Zahlentheorie. So beweist man die Behauptungen über ganze Zahlen im allgemeinen durch Schluß von n auf $n + 1$, und man definiert die zahlentheoretischen Funktionen meistens so, daß man den Funktionswert $\varphi(n + 1)$ aus Funktionswerten aufbaut, die an niedrigeren Stellen angenommen werden.

Skolem¹⁾ hat gezeigt, daß sich die übliche Arithmetik finiterweise — also ohne Benutzung der Begriffe „alle“ und „es gibt“ — aufbauen läßt, wenn man sich auf diese „rekurrierende Denkweise“ stützt. Die Klasse der rekursiven Funktionen ist demnach ein auch vom Standpunkt des Intuitionismus unanfechtbares Gebiet der Mathematik und enthält alle gebräuchlichen Begriffe der Zahlentheorie. Es scheint also lohnend, die rekursiven Funktionen auch an und für sich, von den Anwendungen abgesehen, zu untersuchen. Dies erfordert ausschließlich solche Hilfsmittel, die zu den ersten Elementen der Zahlentheorie gehören; daher *setze ich keinerlei besondere Vorkenntnisse*, insbesondere nichts aus der mathematischen Logik, *voraus*.

2. Die rekursiven Funktionen wurden auch öfters als Hilfsmittel zu verschiedenen Untersuchungen herangezogen, namentlich von Hilbert²⁾ und Ackermann³⁾ zum Kontinuumproblem und vor kurzem von Gödel⁴⁾ zu seinen wichtigen Untersuchungen über die Unbeweisbarkeit gewisser

¹⁾ Th. Skolem, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise, Videnskapsselskapets Skrifter (Kristiania) I. Mat.-Naturv. Kl. (1923), Nr. 6.

²⁾ D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1916), S. 161—190.

³⁾ W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Annalen 99 (1928), S. 118—133.

⁴⁾ K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I., Monatshefte für Math. und Phys. 38 (1931), S. 173—198.

Widerspruchsfreiheitssätze. Die bei diesen Untersuchungen zugrunde gelegten Rekursionsbegriffe zeigen gewisse Abweichungen voneinander.

3. Der Begriff der Rekursion läßt sich auf viele verschiedene Weisen abgrenzen. Ich beschränke mich im folgenden auf solche Rekursionen, die zahlentheoretische Funktionen definieren, nur Zahlenvariablen enthalten und ein wirklich durchführbares Verfahren zur Berechnung der Funktionswerte für gegebene Zahlenwerte der Argumente liefern. Die einfachste Form einer solchen Rekursion ist jene, die Gödel in seiner zitierten Arbeit verwendet; diese werde ich im folgenden als „*primitive Rekursion*“ bezeichnen.

Eine einstellige Funktion $\varphi(n)$ entsteht durch primitive Rekursion aus einer Konstanten k und aus einer zweistelligen Funktion $\beta(a, b)$, wenn

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= k \\ \varphi(n+1) &= \beta(n, \varphi(n)).\end{aligned}$$

Außer den Variablen n , nach welcher die Rekursion läuft, können in der Funktion auch andere Variablen als *Parameter* auftreten. Allgemein werde ich sagen, daß eine $r+1$ -stellige Funktion $\varphi(n, a_1, a_2, \dots, a_r)$ durch primitive Rekursion aus der r -stelligen Funktion $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_r)$ und aus der $r+2$ -stelligen Funktion $\beta(n, a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1})$ entsteht, wenn

$$\begin{aligned}\varphi(0, a_1, \dots, a_r) &= \alpha(a_1, \dots, a_r) \\ \varphi(n+1, a_1, \dots, a_r) &= \beta(n, a_1, \dots, a_r, \varphi(n, a_1, \dots, a_r)).\end{aligned}$$

Die primitive Rekursion ist also dadurch charakterisiert, daß der Funktionswert an der Stelle $n+1$ von der Stelle und vom Funktionswert an der vorangehenden Stelle n , bei unveränderten Parametern, abhängt.

Ich betrachte folgende Verallgemeinerungen der primitiven Rekursion:

1. *Die Wertverlaufsrekursion.* Diese ist eine Definition, nach welcher der Funktionswert $\varphi(n+1)$ nicht aus dem unmittelbar vorangehenden Wert $\varphi(n)$, sondern aus mehreren der vorherigen Werte $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)$, also aus dem vorangehenden Wertverlauf der Funktion aufgebaut wird. (Z. B. die rekursive Formel von Euler für die Summe der Teiler von n , bezeichnet mit $\sigma(n)$):

$$\sigma(n) = \sum_i (-1)^{i-1} \left\{ \sigma\left(n - \frac{3i^2+i}{2}\right) + \sigma\left(n - \frac{3i^2-i}{2}\right) \right\},$$

wobei i solche positive Zahlen durchläuft, für die die vorkommenden Argumente von σ nicht negativ sind und statt $\sigma(0)$ stets n zu setzen ist.)

2. *Die eingeschachtelte Rekursion.* Diese ist eine solche Definition einer mehrstelligen Funktion, bei welcher die Parameter nicht festgehalten werden, vielmehr Einsetzungen für sie erfolgen; hier muß man zum Aufbau des Funktionswertes $\varphi(n+1, a_1, \dots, a_r)$ nicht bloß den Funktions-

wert $\varphi(n, a_1, \dots, a_r)$, sondern die Funktion $\varphi(n, a_1, \dots, a_r)$, als Funktion von $a_1, a_2, \dots, a_r$ kennen. Eine solche Rekursion hat die Form

$$\varphi(0, a_1, a_2, \dots, a_r) = \alpha(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$$\varphi(n+1, a_1, a_2, \dots, a_r) = f_{b_1 b_2 \dots b_r}(n, a_1, a_2, \dots, a_r, \varphi(n, b_1, b_2, \dots, b_r)),$$

wobei der „Term“ $f_{b_1 b_2 \dots b_r}(n, a_1, a_2, \dots, a_r, \varphi(n, b_1, b_2, \dots, b_r))$ aus den Variablen $n, a_1, \dots, a_r$, ferner gewissen schon eingeführten rekursiven Funktionen und der Funktion $\varphi(n, a_1, \dots, a_r)$ — aufgefaßt nur als Funktion der Argumente $a_1, \dots, a_r$, d. h. bei Festhaltung von n in der ersten Argumentstelle — durch Substitutionen aufgebaut ist⁵⁾. Eine solche Rekursion ist z. B. die bekannte Definition der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{0}{a} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\binom{n+1}{a} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 0 \\ \binom{n}{a-1} + \binom{n}{a} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es können auf der rechten Seite sogar eingeschachtelte Funktionswerte vorkommen, z. B.

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \gamma(n, a, \varphi(n, a))))).$$

Diesen Rekursionsbegriff verwendet Hilbert in seiner zitierten Arbeit. Bei Hilbert werden zur Herstellung des Terms auch höhere Funktionentypen zugelassen, deren Argumente nicht nur natürliche Zahlen durchlaufen (was für seinen Ansatz zum Kontinuumproblem unerlässlich ist); solche Funktionentypen will ich hier von vornherein ausschließen.

3. Die *mehrfache Rekursion* — im Gegensatz zu der bisherigen einfachen — d. h. die gleichzeitige Rekursion nach zwei oder mehreren Variablen.

4. Unter *rekursiven Funktionen* verstehe ich jene, die aus gewissen einfachen Ausgangsfunktionen durch eine endliche Kette von Substitutionen⁶⁾ und Rekursionen entstehen. Als Ausgangsfunktionen wählt man

⁵⁾ Der Index $b_1 b_2 \dots b_r$ von f weist darauf hin, daß

$$f_{b_1 b_2 \dots b_r}(n, a_1, \dots, a_r, g(n, b_1, b_2, \dots, b_r))$$

von der Funktion g , und nicht von den Argumenten $b_1, b_2, \dots, b_r$ abhängt, diese dienen vielmehr nur zur Numerierung der „freien“ Leerstellen von g , die in f durch Einsetzungen „gebunden“ werden sollen.

⁶⁾ Statt der allgemeinen Substitution würde es genügen, die Substitution von 1 (und zwar in die erste Leerstelle einer Funktion) zuzulassen. In der Tat ist $\beta(\alpha(a)) = \varphi(1, a)$, falls $\varphi(n, a)$ folgendermaßen definiert wird:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a)$$

$$\varphi(n+1, a) = \beta(\varphi(n, a)).$$

Analoges gilt auch für mehrstellige Funktionen.

zweckmäßig die Funktionen 0 und $n + 1$, die schon bei Peano als die Grundbegriffe der Arithmetik (auf die alle übrigen Begriffe zurückgeführt werden) dienen.

Man könnte glauben, daß die rekursiven Funktionen bei verschiedener Wahl des Rekursionsbegriffs verschiedene Klassen von zahlentheoretischen Funktionen bilden; die engste, wenn nur die primitive Rekursion zugelassen wird (es ist trivial, daß die übrigen Rekursionen diese als Spezialfall enthalten). Ich werde aber beweisen, daß die Hinzunahme der Rekursionen 1. und 2. die Klasse der durch primitiven Rekursionen definierten rekursiven Funktionen nicht erweitert. Man kann sogar zur selben Klasse auch so gelangen, daß man nur die einfachste primitive Rekursion, von der Form

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 1 \\ \varphi(n+1) &= \beta(n, \varphi(n))\end{aligned}$$

zuläßt, worin keine Parameter vorkommen, dafür aber auch noch einige zweistellige Funktionen als Ausgangsfunktionen hinzunimmt.

Daß die mehrfache Rekursion dagegen aus dieser Klasse hinausführt, hat Ackermann in seiner zitierten Arbeit bewiesen. Sein Beweis läßt sich durch die eben angedeuteten Resultate wesentlich vereinfachen.

Auf die mehrfache Rekursion will ich in einer späteren Arbeit zurückkommen; in derselben werde ich auch die Behauptung beweisen, daß man sich auf Rekursionen ohne Parameter beschränken kann.

II.

5. Von jetzt an werde ich nur jene Funktionen rekursiv nennen, die aus den Ausgangsfunktionen 0 und $n + 1$ durch eine endliche Kette von Substitutionen und *primitiven* Rekursionen entstehen. Bekanntlich sind n , $a + n$, $a \cdot n$, a^n , $n!$ rekursive Funktionen⁷⁾. Von Skolem¹⁾ und später unabhängig von ihm von Gödel⁴⁾ wurde von einem großen Teile der zahlentheoretischen Funktionen bewiesen, daß sie in diesem Sinne rekursiv sind. Ich setze die Kenntnis dieser Arbeiten nicht voraus, daher werde ich für die Funktionen, deren Rekursivität ich benutze, je eine rekursive Definition angeben.

6. Erstens ist es klar, daß samt $a + n$ und $a \cdot n$ auch die mehrgliedrige Summe und auch das Produkt von mehreren Faktoren:

⁷⁾ Genau genommen muß man, um $a + n$ und $a \cdot n$ definieren zu können, auch die triviale Operation der Vergrößerung der Anzahl der Leerstellen einer Funktion durch Hinzunahme von „fiktiven“ Variablen, von denen die Funktion in Wirklichkeit nicht abhängt, zulassen. Besitzt man bereits die Funktionen $a + n$ und $a \cdot n$, so läßt sich diese Operation auf Substitutionen zurückführen (nämlich durch Addition der Nullfachen der fiktiven Variablen zur fraglichen Funktion).

$a_1 + a_2 + \dots + a_r$ bzw. $a_1 \cdot a_2 \dots a_r$ rekursiv sind; diese lassen sich nämlich aus $a + n$ bzw. $a \cdot n$ durch Substitutionen aufbauen.

Auch das ist leicht einzusehen, daß mit $\alpha(n, a_1, \dots, a_r)$ zugleich auch die Funktionen

$$\varphi(n, a_1, \dots, a_r) = \sum_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$$

und

$$\psi(n, a_1, \dots, a_r) = \prod_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$$

rekursiv sind; $\psi(n, a_1, \dots, a_r)$ läßt sich z. B. folgendermaßen definieren:

$$\psi(0, a_1, \dots, a_r) = \alpha(0, a_1, \dots, a_r)$$

$$\psi(n+1, a_1, \dots, a_r) = \alpha(n+1, a_1, \dots, a_r) \cdot \psi(n, a_1, \dots, a_r).$$

7. Unter $a \div n$ verstehe ich die Funktion, welche gleich $a - n$ ist, wenn $a > n$, und gleich 0, wenn $a \leq n$. Der Spezialfall $n \div 1$ läßt sich durch

$$0 \div 1 = 0$$

$$(n+1) \div 1 = n$$

definieren, und wenn man diese Funktion anwendet, ergibt sich $a \div n$ wie folgt:

$$a \div 0 = a$$

$$a \div (n+1) = (a \div n) \div 1.$$

$a \div n$ ist also auch rekursiv. Ferner sind $\text{sg } n$ und $\overline{\text{sg } n}$, wo

$$\text{sg } n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{,, } n \neq 0 \end{cases}$$

und

$$\overline{\text{sg } n} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{,, } n \neq 0, \end{cases}$$

ohne weiteres als rekursive Funktionen zu erkennen.

8. Die Funktion $\left[\frac{a}{b}\right]$ läßt sich auch rekursiv definieren. Darunter will ich im Falle $b = 0$ Null verstehen, in jedem anderen Fall die größte in $\frac{a}{b}$ enthaltene ganze Zahl.

Es sei nämlich

$$a = q \cdot b + r \quad (r < b),$$

so ist $b (> 0)$ in $a + 1$ dann und nur dann $q + 1$ -mal enthalten, wenn $r = b - 1$. Da nun $q = \left[\frac{a}{b}\right]$, also $r = a - \left[\frac{a}{b}\right] \cdot b$ ist, ist

$$b - r = \left(\left[\frac{a}{b}\right] + 1\right) \cdot b - a.$$

Die Bedingung $b - r = 1$ kann also durch

$$\left(\left[\frac{a}{b}\right] + 1\right) \cdot b - (a + 1) = 0$$

ausgedrückt werden. Es ist nun

$$\text{sg } b \cdot \overline{\text{sg}} \left(\left(\left[\frac{a}{b} \right] + 1 \right) \cdot b - (a + 1) \right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } b > 0 \text{ und } b - r = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also läßt sich $\left[\frac{a}{b}\right]$ definieren wie folgt:

$$\left[\frac{0}{b}\right] = 0$$

$$\left[\frac{a+1}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] + \text{sg } b \cdot \overline{\text{sg}} \left(\left(\left[\frac{a}{b} \right] + 1 \right) \cdot b - (a + 1) \right).$$

Den bei der Teilung auftretenden Rest $r = \varrho(a, b)$ erhält man aus $\left[\frac{a}{b}\right]$ folgendermaßen:

$$\varrho(a, b) = a - \left[\frac{a}{b}\right] \cdot b.$$

9. Gödel nennt eine Beziehung zwischen den Variablen $a_1, a_2, \dots, a_r$ rekursiv, wenn es eine rekursive Funktion $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_r)$ gibt, die für solche und nur solche $a_1, a_2, \dots, a_r$ verschwindet, für welche die fragliche Beziehung besteht. Es sind z. B. $a = b$, $a \neq b$ und $a < b$ rekursive Beziehungen, da $a = b$ mit $(a \div b) + (b \div a) = 0$, $a \neq b$ mit $\overline{\text{sg}}[(a \div b) + (b \div a)] = 0$ und $a < b$ mit $(a + 1) \div b = 0$ gleichbedeutend ist. Ist ferner das Bestehen der Beziehungen $B_1(a_1, a_2, \dots, a_r)$ und $B_2(a_1, a_2, \dots, a_r)$ mit $\beta_1(a_1, a_2, \dots, a_r) = 0$ bzw. $\beta_2(a_1, a_2, \dots, a_r) = 0$ gleichbedeutend, wo β_1 und β_2 rekursive Funktionen sind, so besteht B_1 und B_2 dann und nur dann zu gleicher Zeit, wenn

$$\beta_1(a_1, a_2, \dots, a_r) + \beta_2(a_1, a_2, \dots, a_r) = 0.$$

Wird das gleichzeitige Bestehen von B_1 und B_2 symbolisch durch $B_1 \& B_2$ ausgedrückt, so ist also diese Beziehung

$$B_1(a_1, a_2, \dots, a_r) \& B_2(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

zugleich mit B_1 und B_2 rekursiv.

Es läßt sich auch die Rekursivität einer aus rekursiven Funktionen „zusammengeflochtenen“ Funktion beweisen: Sind

$$B_1(a_1, a_2, \dots, a_r), B_2(a_1, a_2, \dots, a_r), \dots, B_k(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

solche rekursiven Beziehungen, daß für eine jede Kombination $a_1, a_2, \dots, a_r$ eine und nur eine von ihnen besteht, sind ferner $\alpha_1(a_1, a_2, \dots, a_r)$, $\alpha_2(a_1, a_2, \dots, a_r)$, $\dots$, $\alpha_k(a_1, a_2, \dots, a_r)$ rekursive Funktionen, so ist auch die folgendermaßen definierte Funktion $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_r)$ rekursiv:

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_r) = \begin{cases} \alpha_1(a_1, a_2, \dots, a_r), & \text{falls } B_1(a_1, a_2, \dots, a_r) \text{ besteht,} \\ \alpha_2(a_1, a_2, \dots, a_r), & \text{,, } B_2(a_1, a_2, \dots, a_r) \text{ ,,} \\ \dots & \dots \\ \alpha_k(a_1, a_2, \dots, a_r), & \text{,, } B_k(a_1, a_2, \dots, a_r) \text{ ,,} \end{cases}$$

Es sei nämlich $\beta_i(a_1, a_2, \dots, a_r)$ für $i = 1, 2, \dots, k$ eine Funktion, die dann und nur dann verschwindet, wenn $B_i(a_1, a_2, \dots, a_r)$ besteht, dann ist

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_r) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(a_1, a_2, \dots, a_r) \cdot \overline{\text{sg}}(\beta_i(a_1, a_2, \dots, a_r));$$

$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_r)$ entsteht also durch Einsetzung aus rekursiven Funktionen.

Durch Anwendung der „zusammengeflochtenen Funktion“ ergibt sich insbesondere, daß samt $\alpha(n, a_1, \dots, a_r)$ auch $\varphi(n, m, a_1, \dots, a_r) = \sum_{i=m}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$ rekursiv ist, indem man diese Funktion folgendermaßen erklärt:

$$\varphi(n, m, a_1, \dots, a_r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m > n, \\ \sum_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r), & \text{falls } m = 0, \\ \sum_{i=0}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r) - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha(i, a_1, \dots, a_r), & \text{falls } 0 < m \leq n. \end{cases}$$

Ähnlich läßt sich auch $\prod_{i=m}^n \alpha(i, a_1, \dots, a_r)$ definieren.

10. Mit Hilfe des Vorherigen ist es leicht zu beweisen, daß auch die Funktionen $\vartheta(n, a)$, p_n und $\pi_n(a)$ rekursiv sind, wobei

$$\vartheta(n, a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ durch } a \text{ teilbar ist,} \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases}$$

p_n die der Größe nach n -te ungerade Primzahl und für $n = 0$ die Zahl 2 bedeutet; und $\pi_n(a)$ für $a \neq 0$ der Exponent von p_n in der Primfaktorzerlegung der Zahl a , und für $a = 0$ Null ist.

Es ist nämlich⁸⁾

$$\vartheta(n, a) = \text{sg } \varrho(n, a).$$

Um p_n zu definieren, zeige ich erst, daß die (eingliedrige) Beziehung $\Gamma(n)$: „ n ist Primzahl“, rekursiv ist. $\Gamma(n)$ ist nämlich gleichbedeutend damit, daß $(n-1)!$ durch n nicht teilbar und $n > 1$ ist, also mit

$$\vartheta((n-1)!, n) \neq 0 \text{ \& } n > 1.$$

Wird nun die Funktion $\varphi(n, a, b)$ folgendermaßen definiert:

$$\varphi(n, a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } n \leq a, \\ n, & \text{falls } n > a, \Gamma(n) \text{ besteht, und } b = a, \\ b & \text{sonst,} \end{cases}$$

so bedeutet die durch

$$\begin{aligned} \varphi(0, a) &= a \\ \varphi(n+1, a) &= \varphi(n+1, a, \varphi(n, a)) \end{aligned}$$

⁸⁾ Die rekursive Definition der Funktionen p_n und $\pi_n(a)$ ließe sich durch Anwendung der Zeichen der theoretischen Logik etwas verkürzen.

definierte Funktion für $n > a$ die kleinste Primzahl zwischen a (excl.) und n (incl.), falls eine solche existiert. Demnach kann p_n folgendermaßen definiert werden:

$$p_0 = 2 \\ p_{n+1} = \psi(p_n! + 1, p_n).$$

Sei endlich

$$\varphi(n, a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \vartheta(a, p_b^{n+1}) = 0, \\ n, & \text{falls } \vartheta(a, p_b^n) = 0 \text{ \& } \vartheta(a, p_b^{n+1}) \neq 0, \\ c & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\psi(0, a, b) = 0 \\ \psi(n+1, a, b) = \varphi(n+1, a, b, \psi(n, a, b)),$$

dann bedeutet $\psi(n, a, b) + 1$ den kleinsten derjenigen Exponenten $i \leq n+1$, für welche a durch p_b^i nicht teilbar ist, falls ein solcher existiert. Durch p_b^a ist a , falls $a \neq 0$, gewiß nicht teilbar, also ist⁹⁾

$$\pi_n(a) = \psi(a, a, n).$$

Wegen einer späteren Anwendung bemerke ich noch, daß beim Aufbau der Funktionen $a \cdot n$, a^n , p_n und $\pi_r(a)$ bei festem r aus den Ausgangsfunktionen 0 und $n+1$ nur solche Rekursionen benutzt werden, die ein- oder zweistellige Funktionen definieren.

III.

11. Im folgenden werde ich durch Rekursion nur höchstens zweistellige Funktionen definieren. Das ist keine Einschränkung der Allgemeinheit; denn in der rekursiven Definition einer mehrstelligen Funktion lassen sich

⁹⁾ Weitere Beispiele rekursiver Funktionen, und zwar solche, die eher vom Gesichtspunkt der Analysis, als der elementaren Zahlentheorie, von Interesse sind, gewinnt man beim Studium der Funktion $\varphi_\xi(n) = [\xi \cdot n]$ (mit positiv reellem ξ). Für rationales ξ ist diese Funktion (wegen der Rekursivität von $[\frac{a}{b}]$) offenbar rekursiv; ich habe gezeigt, daß das gleiche für algebraisches ξ zutrifft. Ferner habe ich bewiesen, daß $\varphi_\xi(n)$ dann und nur dann rekursiv ist, wenn in der (bekanntlich stets existierenden und für irrationales ξ eindeutigen) Entwicklung von ξ :

$$\xi = x_0 + \frac{x_1}{1!} + \frac{x_2}{2!} + \frac{x_3}{3!} + \dots,$$

(wobei $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ positive ganze Zahlen sind und $x_n < n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$), x_n eine rekursive Funktion von n ist. Z. B. sind wegen

$$e = 2 + \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots, \\ e^{-1} = \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \dots,$$

$[e \cdot n]$ und $[\frac{n}{e}]$ rekursive Funktionen von n . Auf den Beweis dieser Behauptungen, die im folgenden nicht benutzt werden, gehe ich hier nicht ein.

jene Variablen, die an der Rekursion nicht teilnehmen, durch eine einzige Variable ersetzen. Wenn nämlich die Definition von $\varphi(n, a_1, a_2, \dots, a_r)$

$$\varphi(0, a_1, a_2, \dots, a_r) = \alpha(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$\varphi(n+1, a_1, a_2, \dots, a_r) = f_{b_1 b_2 \dots b_r}(n, a_1, a_2, \dots, a_r, \varphi(n, b_1, b_2, \dots, b_r))$ ist¹⁰⁾, so kann man folgende neuen Variablen einführen:

$$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r},$$

$$b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}.$$

Dann bekommt man aus der zweistelligen Funktion:

$$\varphi(n, a) = \varphi(n, \pi_1(a), \pi_2(a), \dots, \pi_r(a))$$

die ursprüngliche $r+1$ -stellige durch Substitution:

$$\varphi(n, a_1, a_2, \dots, a_r) = \varphi(n, p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}).$$

Diese zweistellige Funktion $\varphi(n, a)$ läßt sich wieder durch Rekursion definieren: es sei

$$\xi(a) = \alpha(\pi_1(a), \pi_2(a), \dots, \pi_r(a))$$

und

$$g_b(n, a, h(b)) = f_{b_1 b_2 \dots b_r}(n, \pi_1(a), \dots, \pi_r(a), h(p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r})),$$

dann ist

$$\varphi(0, a) = \xi(a)$$

$$\varphi(n+1, a) = g_b(n, a, \varphi(n, b)).$$

Nach einer früheren Bemerkung sind zum Aufbau der hier verwendeten Funktionen $\pi_i(a)$ und $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ nur rekursive Definitionen von höchstens zweistelligen Funktionen notwendig.

Dasselbe Verfahren läßt sich auch auf die Wertverlaufsrekursion anwenden.

§ 1.

Die Wertverlaufsrekursion.

12. Von Wertverlaufsrekursionen gibt es verschiedene Arten. Als einfachster Typus einer Wertverlaufsrekursion kann

$$1. \quad \varphi(0, a) = \alpha(a)$$

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(\gamma_1(n, a), a), \varphi(\gamma_2(n, a), a), \dots, \varphi(\gamma_k(n, a), a))$$

bezeichnet werden, wobei $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ rekursive Funktionen sind und für $i = 1, 2, \dots, k$

$$\gamma_i(n, a) \leq n.$$

Man sieht aber, daß es viel allgemeinere Arten von Wertverlaufsrekursionen gibt. So ist z. B. die in der Einleitung erwähnte Eulersche Re-

¹⁰⁾ Zur Bedeutung des Index $b_1 b_2 \dots b_r$ von f , und des später vorkommenden Index b von g siehe Fußnote ⁵⁾.

kursionsformel für die Teilersumme nicht vom Typus 1.; ebenso nicht die folgende Definition:

$$2. \quad \varphi(0, a) = \alpha(a) \\ \varphi(n+1, a) = \beta\left(n, a, \prod_{i=0}^n \beta_1(\varphi(i, a))\right),$$

wo α, β, β_1 rekursive Funktionen sind.

Ich werde zeigen, daß die Wertverlaufsrekursion in allgemeinem Sinne — also darunter auch die vom Typus 1. — auf einen dem Typus 2. ähnlichen Fall, und dieser auf primitive Rekursionen zurückführbar ist.

Sei $\varphi(n+1, a)$ auf irgendeine Weise so definiert, daß es rekursiv von vorhergehenden Funktionswerten abhängt. Sein Wertverlauf wird durch die „Wertverlaufsfunction“:

$$\psi(n, a) = p_0^{q(0, a)} \cdot p_1^{q(1, a)} \dots p_n^{q(n, a)} = \prod_{i=0}^n p_i^{q(i, a)}$$

vollständig charakterisiert. Ein jeder Funktionswert vor $\varphi(n+1, a)$ kommt in der Primfaktorzerlegung von $\psi(n, a)$ als Exponent einer Primzahl vor: für $i \leq n$ ist

$$\varphi(i, a) = \pi_i(\psi(n, a)).$$

Da nun die Funktion $\pi_i(n)$ rekursiv ist, wird $\varphi(n+1, a)$, das von den Ausdrücken $\varphi(i, a)$ rekursiv abhängt, eine rekursive Funktion der Stelle und des Wertes $\psi(n, a)$. Für die Funktion $\varphi(n, a)$ gelten also Gleichungen der Form:

$$\varphi(0, a) = \alpha(a) \\ \varphi(n+1, a) = \gamma(n, a, \psi(n, a)),$$

wo α und γ rekursive Funktionen sind.

Im Spezialfalle 1. ist

$$\gamma(n, a, b) = \beta(n, a, \pi_{\gamma_1(n, a)}(b), \pi_{\gamma_2(n, a)}(b), \dots, \pi_{\gamma_k(n, a)}(b)),$$

und im Spezialfalle 2.

$$\gamma(n, a, b) = \beta\left(n, a, \prod_{i=0}^n \beta_1(\pi_i(b))\right).$$

Nun läßt sich die Funktion $\psi(n, a)$ folgendermaßen durch eine primitive Rekursion definieren:

$$\psi(0, a) = 2^{q(0, a)} = 2^{\alpha(a)} \\ \psi(n+1, a) = \psi(n, a) \cdot p_{n+1}^{q(n+1, a)} = \psi(n, a) \cdot p_{n+1}^{\gamma(n, a, \psi(n, a))}.$$

$\psi(n, a)$ ist also rekursiv, und zugleich auch $\varphi(n, a)$, da

$$\varphi(n, a) = \pi_n(\psi(n, a)).$$

Die Wertverlaufsrekursion läßt sich also tatsächlich allgemein auf primitive Rekursionen zurückführen.

§ 2.

Die eingeschachtelte Rekursion.

13. In diesem Paragraphen werde ich beweisen, daß eine eingeschachtelte Rekursion

$$(D_1) \quad \begin{cases} \varphi(0, a) = \alpha(a) \\ \varphi(n+1, a) = g_b(n, a, \varphi(n, b)), \end{cases}$$

wobei α und die in den Term $g_b(n, a, \varphi(n, b))$ eingehenden Funktionen rekursiv sind, ebenfalls zu einer rekursiven Funktion führt.

Zu diesem Zweck ist es zunächst nötig, die Struktur des Terms $g_b(n, a, \varphi(n, b))$ näher zu analysieren, um die allgemeine Form der Definition (D_1) explizit aufschreiben zu können.

Zum Aufbau eines Terms der Art $g_b(n, a, \varphi(n, b))$ geht man von den rekursiven Funktionen aus, die ich auch als „Terme nullter Ordnung“ bezeichnen werde. Setzt man eine rekursive Funktion für b in $\varphi(n, b)$ ein, so entsteht ein „Term erster Ordnung“; auch jede rekursive Funktion von n, a und beliebig vielen solchen Termen gilt als Term erster Ordnung. Mit diesen verfährt man analog, um Terme zweiter Ordnung zu bilden und so fort. Allgemein: es sei der Begriff eines Terms erster, zweiter, ..., m -ter Ordnung bereits definiert; dann bezeichne ich als Term $m+1$ -ter Ordnung eine rekursive Funktion von n, a und beliebig vielen Ausdrücken, die durch Einsetzung von Termen höchstens m -ter Ordnung — von denen aber wenigstens einer genau m -ter Ordnung sein soll — für b in $\varphi(n, b)$ entstehen. Nun kann $g_b(n, a, \varphi(n, b))$ in (D_1) ein Term von beliebiger (natürlich endlicher) Ordnung sein.

Die beim Aufbau von $g = g_b(n, a, \varphi(n, b))$ auftretenden Terme von niedrigerer Ordnung, die also in g als zweite Argumente von φ figurieren, nenne ich die „Bausteine“ von g . Die Bausteine dieser Bausteine sind ebenfalls Bausteine von g . Ein jeder Term g hat die Form

$$\beta(n, a, \varphi(n, g'), \varphi(n, g''), \dots, \varphi(n, g^{(k)})),$$

wobei $g', g'', \dots, g^{(k)}$ einige der Bausteine von g (seine „unmittelbaren Bausteine“) sind.

Ordnen wir alle Bausteine von g , auch g selbst hinzugenommen, nach wachsender Ordnungszahl (diejenigen mit gleicher Ordnungszahl beliebig, etwa in der Ordnung, die ihre ersten Auftrittstellen in g besitzen). Die so entstandene Folge sei

$$h', h'', \dots, h^{(q)}.$$

Dann ist gewiß h' von nullter Ordnung, also $h' = \beta_1(n, a)$, wobei β_1 eine rekursive Funktion ist; ferner ist $g = h^{(q)}$. Die Bausteine eines be-

liebigen $h^{(i)}$, darunter auch die unmittelbaren, stehen in der obigen Folge vor $h^{(i)}$; daher besitzt nach der obigen Bemerkung $h^{(i)}$ die Form:

$$h^{(i)} = \beta_i(n, a, \varphi(n, h^{(i_1)}), \varphi(n, h^{(i_2)}), \dots, \varphi(n, h^{(i_k)})),$$

mit $i > i_1, i_2, \dots, i_k \geq 1$, wobei die β_i rekursive Funktionen sind. Der einfacheren und einheitlichen Schreibweise halber erweitern wir β_i , falls nötig, durch fiktive Variable (vgl. Fußnote 7)) derart, daß hier *sämtliche* $h^{(j)}$ mit $j < i$ vorkommen. Dann läßt sich die Struktur von g folgendermaßen aufschreiben:

$$\begin{cases} g_b(n, a, \varphi(n, b)) = \beta_l(n, a, \varphi(n, h^{(l-1)}), \varphi(n, h^{(l-2)}), \dots, \varphi(n, h')), \\ \text{wobei für } i = 1, 2, \dots, l-1 \\ h^{(i)} = \beta_i(n, a, \varphi(n, h^{(i-1)}), \varphi(n, h^{(i-2)}), \dots, \varphi(n, h')). \end{cases}$$

Nennt man noch $\varphi(n, h^{(i)}) = \varphi_i(n, a)$, so kann man also der Definition (D_1) die folgende explizite Form geben:

$$(D_2) \quad \begin{cases} \varphi(0, a) = \alpha(a) \\ \varphi(n+1, a) = \beta_l(n, a, \varphi_{l-1}(n, a), \varphi_{l-2}(n, a), \dots, \varphi_1(n, a)), \\ \text{wobei für } i = 1, 2, \dots, l-1 \\ \varphi_i(n, a) = \varphi(n, \beta_i(n, a, \varphi_{i-1}(n, a), \varphi_{i-2}(n, a), \dots, \varphi_1(n, a))), \end{cases}$$

und $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ rekursive Funktionen sind.

14. Nun werde ich die Definition (D_2) Schritt für Schritt auf immer einfachere und übersichtlichere Spezialfälle zurückführen, bis ich in einem verhältnismäßig einfachen Spezialfall den rekursiven Charakter der definierten Funktion beweisen kann. Zunächst läßt sich die allgemeine Definition (D_2) in zwei Schritten auf ihren Spezialfall $l = 3$ zurückführen.

Der erste Schritt ist die „Auflösung“ der Rekursion: Von dem bekannten Werte $\varphi(0, a)$ ausgehend werden die Werte $\varphi(1, a)$, $\varphi(2, a)$, ... sukzessiv aufgebaut; die zwischendurch auftretenden Ausdrücke werden als nacheinander angenommene Werte einer Funktion $\psi(n, a)$ betrachtet; dann läßt sich diese Funktion $\psi(n, a)$ durch den genannten Spezialfall der Definition (D_2) definieren. Und man geht von $\psi(n, a)$ durch Einsetzen einer rekursiven Funktion zu $\varphi(n, a)$ über.

Sei

$$\psi(0, a) = \varphi(0, a) = \alpha(a).$$

Zum Aufbau von $\varphi(1, a)$ sind die Werte $\varphi_1(0, a)$, $\varphi_2(0, a)$, ..., $\varphi_{l-1}(0, a)$ notwendig. Diese lassen sich folgendermaßen sukzessiv aufbauen: sei

$$\begin{aligned} \psi(1, a) &= \varphi_1(0, a) = \varphi(0, \beta_1(0, a)) = \psi(0, \beta_1(0, a)), \\ \psi(2, a) &= \varphi_2(0, a) = \varphi(0, \beta_2(0, a, \varphi_1(0, a))) = \psi(0, \beta_2(0, a, \psi(1, a))), \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein für $i = 1, 2, \dots, l-1$ $\psi(i, a) = \varphi_i(0, a)$, also zuletzt
 $\psi(l-1, a) = \varphi_{l-1}(0, a) = \varphi(0, \beta_{l-1}(0, a, \varphi_{l-2}(0, a), \varphi_{l-3}(0, a), \dots, \varphi_1(0, a)))$
 $= \psi(0, \beta_{l-1}(0, a, \psi(l-2, a), \psi(l-3, a), \dots, \psi(1, a)))$,

und aus diesen ergibt sich $\varphi(1, a)$ derart:

$$\begin{aligned}\psi(l, a) &= \varphi(1, a) = \beta_l(0, a, \varphi_{l-1}(0, a), \varphi_{l-2}(0, a), \dots, \varphi_1(0, a)) \\ &= \beta_l(0, a, \psi(l-1, a), \psi(l-2, a), \dots, \psi(1, a)).\end{aligned}$$

$\varphi(1, a)$ wurde so in l Schritten aufgebaut. Entsprechend lassen sich der Reihe nach $\varphi(2, a)$, $\varphi(3, a)$, usw. in je l Schritten aufbauen. Diese Schritte entsprechen den weiteren Werten

$$\psi(l+1, a), \psi(l+2, a), \dots, \psi(2l, a); \quad \psi(2l+1, a), \psi(2l+2, a) \dots, \\ \psi(3l, a); \dots$$

der Funktion $\psi(n, a)$. Diese Funktion läßt sich also folgendermaßen definieren:

a) Sei zunächst n von Null verschieden und durch l teilbar, d. h. $n = (d+1) \cdot l$; dann ist

$$\begin{aligned}\psi(n, a) &= \varphi(d+1, a) = \beta_l(d, a, \varphi_{l-1}(d, a), \varphi_{l-2}(d, a), \dots, \varphi_1(d, a)) \\ &= \beta_l(d, a, \psi(n-1, a), \psi(n-2, a), \dots, \psi(n-l+1, a)).\end{aligned}$$

b) Sei nun $n = d \cdot l + r$, wo $0 < r < l$; dann ist $\psi(n, a)$ der r -te Wert, der im Aufbau von $\varphi(d+1, a)$ auftritt, also analog zu dem bisherigen

$$\begin{aligned}\psi(n, a) &= \varphi_r(d, a) = \varphi(d, \beta_r(d, a, \varphi_{r-1}(d, a), \varphi_{r-2}(d, a), \dots, \varphi_1(d, a))) \\ &= \psi(d \cdot l, \beta_r(d, a, \psi(n-1, a), \psi(n-2, a), \dots, \psi(n-r+1, a))).\end{aligned}$$

Im Falle a) ist $d = \left\lceil \frac{n}{l} \right\rceil - 1$,

im Falle b) ist $d = \left\lceil \frac{n}{l} \right\rceil$ und $r = \varrho(n, l)$.

Um noch die Fälle $r = 1, 2, \dots, l-1$ in eine Formel zusammenzufassen, definieren wir eine Funktion $\beta(m, n, a, b_1, \dots, b_{l-2})$ wie folgt:

$$\beta(m, n, a, b_1, \dots, b_{l-2}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \varrho(m, l) = 0, \\ \beta_1(n, a), & \text{falls } \varrho(m, l) = 1, \\ \beta_2(n, a, b_1), & \text{falls } \varrho(m, l) = 2, \\ \dots & \dots \\ \beta_{l-1}(n, a, b_{l-2}, b_{l-3}, \dots, b_1), & \text{falls } \varrho(m, l) = l-1. \end{cases}$$

Demnach läßt sich $\varphi(n, a)$ folgendermaßen definieren, wenn man noch bedenkt, daß sich die Tatsache, daß $n+1$ durch l teilbar ist, durch $\vartheta(n+1, l) = 0$ ausdrücken läßt (siehe Nr. 10):

$$(D_3) \left\{ \begin{array}{l} \varphi(0, a) = \alpha(a) \\ \varphi(n+1, a) = \vartheta(n+1, l) \\ \cdot \varphi\left(\left[\frac{n+1}{l}\right] \cdot l, \beta(n+1, \left[\frac{n+1}{l}\right], a, \varphi(n, a), \varphi(n-1, a), \dots, \varphi(n-l+3, a))\right) \\ + \overline{sg} \vartheta(n+1, l) \cdot \beta_l\left(\left[\frac{n+1}{l}\right] - 1, a, \varphi(n, a), \varphi(n-1, a), \dots, \varphi(n-l+2, a)\right). \end{array} \right.$$

Aus der inhaltlichen Definition der Funktion φ geht hervor, daß

$$\varphi(n, a) = \varphi(n \cdot l, a)$$

besteht. Es bietet keine Schwierigkeiten, das Bestehen dieser Gleichung auf Grund der Definition (D_3) formal zu verifizieren. Daher entsteht $\varphi(n, a)$ aus der Funktion $\psi(n, a)$ durch Einsetzen einer rekursiven Funktion.

15. In der Definition (D_3) wird $\varphi(n+1, a)$ nicht nur mit Hilfe von $\varphi(n, \cdot)$, sondern mit Verwendung von mehreren der Werte $\varphi(0, \cdot)$, $\varphi(1, \cdot)$, ..., $\varphi(n, \cdot)$ definiert; diese Definition kann also als eine eingeschachtelte Wertverlaufsrekursion aufgefaßt werden. Der zweite Schritt bei der Zurückführung von (D_2) auf seinen Spezialfall $l=3$ ist die Zurückführung dieser Wertverlaufsrekursion auf eine gewöhnliche eingeschachtelte Rekursion. Diese Zurückführung geschieht genau so wie im Falle, wo keine Einschachtelung vorliegt.

Zur Charakterisierung des Wertverlaufs von φ verwende ich auch hier die Wertverlaufsfunktion

$$\xi(n, a) = p_0^{\varphi(0, a)} \cdot p_1^{\varphi(1, a)} \dots p_n^{\varphi(n, a)}.$$

Durch diese stellt sich $\varphi(k, a)$ dar mittels der für $k \leq n$ bestehenden Gleichung

$$\varphi(k, a) = \pi_k(\xi(n, a)).$$

$\xi(n+1, a)$ läßt sich ausdrücken, wie folgt:

$$\xi(n+1, a) = \xi(n, a) \cdot p_{n+1}^{\varphi(n+1, a)}.$$

$\varphi(n+1, a)$ ist aber nach (D_3) mit Hilfe von $\vartheta(n+1, l) \cdot \varphi\left(\left[\frac{n+1}{l}\right] \cdot l, a\right)$, sowie von $\varphi(n, a)$, $\varphi(n-1, a)$, ..., $\varphi(n-l+3, a)$, $\varphi(n-l+2, a)$ definiert, und diese lassen sich durch Verwendung der Wertverlaufsfunktion der Reihe nach ausdrücken wie folgt:

$$\vartheta(n+1, l) \cdot \pi_{\left[\frac{n+1}{l}\right]}(\xi(n, a));$$

$$\pi_n(\xi(n, a)), \pi_{n-1}(\xi(n, a)), \dots, \pi_{n-l+3}(\xi(n, a)), \pi_{n-l+2}(\xi(n, a)).$$

Wenn man also, um einen besseren Überblick zu haben, folgende Bezeichnungen einführt:

$$\gamma(n, a, b) = \beta\left(n+1, \left[\frac{n+1}{l}\right], a, \pi_n(b), \pi_{n+1}(b), \dots, \pi_{n+l+3}(b)\right)$$

und

$$\begin{aligned} \gamma'(n, a, b, c) &= \vartheta(n+1, l) \cdot \pi_{\left[\frac{n+1}{l}\right] \cdot l}(c) \\ &\quad + \overline{\text{sg}} \vartheta(n+1, l) \cdot \beta_l\left(\left[\frac{n+1}{l}\right] \div 1, a, \pi_n(b), \dots, \pi_{n+l+3}(b)\right), \end{aligned}$$

(es ist klar, daß γ und γ' rekursive Funktionen sind), so ist nach (D_3)

$$\psi(n+1, a) = \gamma'\left(n, a, \xi(n, a), \xi(n, \gamma(n, a, \xi(n, a)))\right).$$

Sei noch

$$\gamma_1(n, a, b, c) = b \cdot p_{n+1}^{\gamma'(n, a, b, c)},$$

so ist

$$\xi(n+1, a) = \gamma_1\left(n, a, \xi(n, a), \xi(n, \gamma(n, a, \xi(n, a)))\right).$$

Wenn man noch beachtet, daß

$$\xi(0, a) = p_0^{\psi(0, a)} = 2^{a(a)}$$

auch rekursiv ist, so sieht man, daß sich $\xi(n, a)$ durch eine Rekursion von der Form (D_2) definieren läßt, worin $l = 3$ ist.

Aus dieser Funktion $\xi(n, a)$ entsteht $\psi(n, a)$ dadurch, daß man sie in eine Leerstelle einer rekursiven Funktion einsetzt; es ist nämlich

$$\psi(n, a) = \pi_n(\xi(n, a)).$$

Man kann sich also auf eingeschachtelte Rekursionen der folgenden Form beschränken (statt $\xi(n, a)$ setze ich wieder $\varphi(n, a)$, statt $2^{a(a)}$ wieder $\alpha(a)$ und statt γ_1 wieder β):

$$(D_4) \quad \begin{cases} \varphi(0, a) = \alpha(a) \\ \varphi(n+1, a) = \beta\left(n, a, \varphi(n, a), \varphi\left(n, \gamma\left(n, a, \varphi(n, a)\right)\right)\right), \end{cases}$$

wo α, β, γ rekursive Funktionen sind.

16. Die Definition (D_4) führe ich endlich auf primitive Rekursionen zurück.

Das Verfahren¹¹⁾ ist sehr ähnlich demjenigen, mit welchem die Definition (D_2) auf ihren Spezialfall $l = 3$ zurückgeführt wurde: ich baue den Wert $\varphi(n, a)$ sukzessiv aus $\varphi(0, a), \varphi(1, a), \varphi(2, a), \dots$ auf, und ich

¹¹⁾ Im einfachsten Spezialfall von (D_4), wo keine eingeschachtelten Funktionswerte vorkommen (z. B. falls $\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \gamma(n, a)))$), gelangt man viel einfacher zum Ziel.

betrachte die dazwischen auftretenden Werte als für $n = 1, 2, 3 \dots$ angenommene Werte einer Funktion $\psi(n, a)$. Doch darf ich jetzt — damit $\psi(n, a)$ nicht wieder durch *eingeschachtelte* frühere Werte ausgedrückt wird — die Substitution $\varphi(n, \gamma(n, a, \varphi(n, a)))$ nicht in einem Schritte durchführen; deshalb substituiere ich $\gamma(n, a, \varphi(n, a))$ sukzessiv in $\psi(1, a)$, $\psi(2, a)$, ..., endlich in $\varphi(n, a)$ an Stelle von a ¹²). Ferner wird die einheitliche Behandlung erleichtert, wenn man von $\psi(0, a) = a$ ausgeht. Sei demnach

$$\psi(0, a) = a,$$

$$\psi(1, a) = \varphi(0, a) = \alpha(a) = \alpha(\psi(0, a)),$$

$$\psi(2, a) = \gamma(0, a, \varphi(0, a)) = \gamma(0, \psi(0, a), \psi(1, a)),$$

$$\psi(3, a) = \varphi(0, \gamma(0, a, \varphi(0, a))) = \alpha(\psi(2, a)),$$

$$\begin{aligned} \psi(4, a) &= \varphi(1, a) = \beta(0, a, \varphi(0, a), \varphi(0, \gamma(0, a, \varphi(0, a)))) \\ &= \beta(0, \psi(0, a), \psi(1, a), \psi(3, a)). \end{aligned}$$

Bisher hat die Substitution noch keine Schwierigkeiten verursacht. Doch bauen wir jetzt, von $\psi(4, a) = \varphi(1, a)$ ausgehend, den Wert $\varphi(2, a)$ auf. Sei

$$\psi(5, a) = \gamma(1, a, \varphi(1, a)) = \gamma(1, \psi(0, a), \psi(4, a)).$$

Wollte ich dies in einem Schritt an Stelle von a in $\varphi(1, a)$ substituieren, so müßte ich $\psi(6, a)$ definieren wie folgt:

$$\psi(6, a) = \varphi(1, \gamma(1, a, \varphi(1, a))) = \psi(4, \psi(5, a)).$$

$\psi(n, a)$ wäre also wieder aus eingeschachtelten früheren Werten definiert. Ich führe deshalb die Substitution in mehreren Schritten durch. Sei

$$\psi(6, a) = \psi(1, \psi(5, a)) = \alpha(\psi(5, a)),$$

$$\psi(7, a) = \psi(2, \psi(5, a)) = \gamma(0, \psi(5, a), \psi(6, a)),$$

$$\psi(8, a) = \psi(3, \psi(5, a)) = \alpha(\psi(7, a)),$$

$$\psi(9, a) = \psi(4, \psi(5, a)) = \beta(0, \psi(5, a), \psi(6, a), \psi(8, a)),$$

und damit ist die Substitution geschehen; sei endlich

$$\begin{aligned} \psi(10, a) &= \varphi(2, a) = \beta(1, a, \varphi(1, a), \varphi(1, \gamma(1, a, \varphi(1, a)))) \\ &= \beta(1, \psi(0, a), \psi(4, a), \psi(9, a)). \end{aligned}$$

Dieses Verfahren läßt sich automatisch fortsetzen. Sei allgemein $\psi(n+1, a)$ der $\mu_1(n+1)$ -te Wert bei der Herstellung von $\varphi(\mu(n+1), a)$

¹²⁾ Diese Methode hätte man auch unmittelbar auf die Definition (D_2) anwenden können, das Verfahren wäre aber wegen technischer Schwierigkeiten unübersichtlich gewesen. Die bisherigen Reduktionen dienen eigentlich bloß zur bezeichnungstechnischen Vereinfachung.

und $\varphi(n, a) = \psi(v(n), a)$, so definiere ich $\psi(n, a)$ für $n \geq 1$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi(n+1, a) &= \gamma(\mu(n+1) - 1, \psi(0, a), \psi(n, a)), \text{ falls } \mu_1(n+1) = 1, \\ \psi(n+1, a) &= \beta(\mu(n+1) - 1, \psi(0, a), \psi(n+1 - \mu_1(n+1), a), \psi(n, a)), \\ &\quad \text{falls } \mu_1(n+1) = v(\mu(n+1)) - v(\mu(n+1) - 1), \end{aligned}$$

und sonst wird $\psi(n+1, a)$ so aufgebaut, daß der erste Ausdruck, der bei der Herstellung von $\varphi(\mu(n+1), a)$ auftritt, nämlich $\psi(v(\mu(n+1)) - 1, a)$, substituiert wird, d. h. dieser wird erst selber aufgeschrieben, dann der Reihe nach in $\psi(1, a)$, $\psi(2, a)$, ... an Stelle von a substituiert; der $\mu_1(n+1)$ -te unter den hier auftretenden Werten von ψ wird also eben derjenige sein, in welchem die Substitution in $\psi(\mu_1(n+1) - 1, a)$ durchgeführt ist. Demnach muß $\psi(n+1, a)$, falls es weder der erste noch der letzte der Werte ist, die $\varphi(\mu(n+1), a)$ aufbauen, folgendermaßen definiert werden:

$$\psi(n+1, a) = \psi(\mu_1(n+1) - 1, \psi(v(\mu(n+1)) - 1, a)).$$

Hiermit ergibt sich zunächst noch eine eingeschachtelte Rekursion. Ich werde diese aber auf eine nicht eingeschachtelte Wertverlaufsrekursion zurückführen.

17. Zuvor muß ich erst die eingeschachtelte Rekursion, die vorläufig nur inhaltlich angegeben ist, wirklich aufstellen.

Beim Aufbau von

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, a), \varphi(n, \gamma(n, a, \varphi(n, a))))$$

tritt erst

$$\psi(v(n) + 1, a) = \gamma(n, a, \varphi(n, a)) = \gamma(n, \psi(0, a), \psi(v(n), a))$$

auf, dann ist dieses zur Bildung von $\varphi(n, \gamma(n, a, \varphi(n, a)))$, d. h. $\psi(v(n), \psi(v(n) + 1, a))$ sukzessiv in $\psi(1, a)$, $\psi(2, a)$, ..., $\psi(v(n), a)$ an Stelle von a zu substituieren, und das bedeutet $v(n)$ Schritte; somit wird für $k = 1, 2, \dots, v(n)$

$$\psi(v(n) + 1 + k, a) = \psi(k, \psi(v(n) + 1, a)),$$

insbesondere

$$\psi(v(n) + 1 + v(n), a) = \psi(v(n), \psi(v(n) + 1, a));$$

endlich hat man

$$\begin{aligned} \psi(v(n) + 1 + v(n) + 1, a) &= \psi(2 \cdot v(n) + 2, a) = \varphi(n+1, a) \\ &= \beta(n, \psi(0, a), \psi(v(n), a), \psi(2 \cdot v(n) + 1, a)) \end{aligned}$$

zu setzen. Demnach läßt sich die Funktion $v(n)$, für welche $\varphi(n, a) = \psi(v(n), a)$ ist, durch die folgende Rekursion definieren:

$$\begin{aligned} v(0) &= 1 \\ v(n+1) &= 2 \cdot v(n) + 2, \end{aligned}$$

und somit ist — wie man durch vollständige Induktion findet —

$$\nu(n) = 3 \cdot 2^n - 2$$

und

$$\nu(n+1) - \nu(n) = 3 \cdot 2^n.$$

$\mu(n)$ läßt sich folgendermaßen definieren: $\mu(n)$ ist die kleinste Zahl i , für welche $\nu(i) \geq n$ ist. Wird also $\kappa_1(n, a, b)$ folgendermaßen definiert:

$$\kappa_1(n, a, b) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \nu(0) \geq a, \text{ das heißt } a \leq 1, \\ 0, & \text{falls } \nu(n) < a, \\ n, & \text{falls } \nu(n) \geq a \text{ \& } b = 0 \text{ \& } a > 1, \\ b & \text{sonst;} \end{cases}$$

ist ferner

$$\lambda_1(0, a) = 0,$$

$$\lambda_1(n+1, a) = \kappa_1(n+1, a, \lambda_1(n, a)),$$

so ist, falls $\nu(n) \geq a$, $\lambda_1(n, a)$ die kleinste Zahl i unter n , für welche $\nu(i) \geq a$. Da nun jedenfalls $\nu(n) \geq n$ ist, so ist

$$\mu(n) = \lambda_1(n, n).$$

Ferner kann $\mu_1(n)$ definiert werden wie folgt:

$$\mu_1(n) = 1 \text{ falls } n \leq 1,$$

$$\mu_1(n) = n \div \nu(\mu(n) \div 1), \text{ falls } n \geq 2.$$

In der Definition von $\mu_1(n)$ bedeutet das Zeichen $\div$ einfach subtrahieren; denn nach der Definition von $\mu(n)$ ist für $n \geq 2$ $\mu(n) \geq 1$ und $n > \nu(\mu(n) - 1)$.

Gemäß diesen Definitionen ist für $n \geq 2$

$$1 \leq \mu_1(n) \leq \nu(\mu(n)) - \nu(\mu(n) - 1) = 3 \cdot 2^{\mu(n)-1},$$

ferner sind $\nu(n)$, $\mu(n)$, $\mu_1(n)$ rekursive Funktionen. Mit Verwendung dieser Funktionen kann man $\psi(n, a)$ folgendermaßen definieren:

$$(D_5) \begin{cases} \psi(0, a) = a, \\ \psi(1, a) = \alpha(\psi(0, a)), \\ \quad \text{und für } n > 0 \\ \psi(n+1, a) = \gamma(\mu(n+1) - 1, \psi(0, a), \psi(n, a)), \text{ falls } \mu_1(n+1) = 1, \\ \psi(n+1, a) = \beta(\mu(n+1) - 1, \psi(0, a), \psi(n+1 - \mu_1(n+1), a), \psi(n, a)), \\ \quad \text{falls } \mu_1(n+1) = 3 \cdot 2^{\mu(n+1)-1}, \\ \psi(n+1, a) = \psi(\mu_1(n+1) - 1, \psi(\nu(\mu(n+1) - 1) + 1, a)) \text{ sonst.} \end{cases}$$

18. Nun wird der Übergang zu einer nicht-eingeschachtelten Wertverlaufsrekursion vollzogen. Hierzu muß ich zuerst einige Hilfsfunktionen rekursiv definieren.

Es sei

$$\iota(c, b, c_1, c_2, c_3) = \begin{cases} \alpha(c_3), & \text{falls } c = 0, \\ \gamma(b, c_1, c_3), & \text{falls } c = 1, \\ \beta(b, c_1, c_2, c_3), & \text{falls } c = 2, \\ 0, & \text{falls } c \geq 3; \end{cases}$$

diese Funktion wird zur Zusammenfassung der Funktionen α , β und γ dienen. Ferner sei

$$\kappa(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \leq 1, \\ 1, & \text{falls } n \geq 2 \text{ \& } \mu_1(n) = 1, \\ 2, & \text{falls } n \geq 2 \text{ \& } \mu_1(n) = 3 \cdot 2^{\mu(n)-1}, \\ \kappa(\mu_1(n) - 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\kappa(n)$ ist also 0, 1 oder 2, je nachdem $\psi(n, a)$ durch eine Substitution in α , γ oder β entstanden ist; $\kappa(0)$ könnte man nach Belieben definieren. Endlich sei

$$\lambda(n) = \begin{cases} \mu(n) - 1, & \text{falls } \mu_1(n) = 1, \text{ oder } \mu_1(n) = 3 \cdot 2^{\mu(n)-1}, \\ \lambda(\mu_1(n) - 1) & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\tau_1(n) = \begin{cases} n, & \text{falls } \mu_1(n) = 1, \text{ oder } \mu_1(n) = 3 \cdot 2^{\mu(n)-1}, \\ \tau_1(\mu_1(n) - 1) & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\tau_2(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mu_1(n) = 1 \\ 3 \cdot 2^{\mu(n)-1}, & \text{falls } \mu_1(n) = 3 \cdot 2^{\mu(n)-1}, \\ \tau_2(\mu_1(n) - 1) & \text{sonst;} \end{cases}$$

diese Funktionen werden dazu dienen, um im Falle $\kappa(n) = 1$ oder $\kappa(n) = 2$ die Ausdrücke aufzustellen, die zur Bildung von $\psi(n, a)$ in γ bzw. β einzusetzen sind.

Es ist leicht einzusehen, daß nach diesen Definitionen für $n \neq 0$ $0 < \tau_1(n), \tau_2(n) \leq n$ besteht. (Denn für $n = 1$ bestehen diese Ungleichungen, da $\mu_1(1) = 1$ ist, und aus der Annahme, daß sie schon für kleinere Argumente als n bestehen, kann man leicht das Bestehen für n folgern.)

$\iota, \kappa, \lambda, \tau_1, \tau_2$ sind ihren Definitionen nach alle rekursive Funktionen. Nunmehr werde ich beweisen, daß die Funktion $\xi(n, a)$, die sich mit ihrer Hilfe durch die Rekursion

$$(D_6) \begin{cases} \xi(0, a) = a \\ \xi(n+1, a) = \iota(\kappa(n+1), \lambda(n+1), \xi(n+1 - \tau_1(n+1), a), \\ \xi(n+1 - \tau_2(n+1), a), \xi(n, a)) \end{cases}$$

definieren läßt, mit der Funktion $\psi(n, a)$ identisch ist. (D_6) ist schon eine nicht-eingeschachtelte Wertverlaufsrekursion, da nach der vorigen Bemerkung $\tau_1(n+1) \neq 0$, $\tau_2(n+1) \neq 0$.

19. Erstens ist evident, daß

$$\xi(0, a) = \psi(0, a).$$

Ferner ist, wegen

$$\kappa(1) = 0 \quad \text{und} \quad \iota(0, b, c_1, c_2, c_3) = \alpha(c_3),$$

$$\xi(1, a) = \alpha(\xi(0, a)) = \alpha(a) = \psi(1, a),$$

das heißt:

$$\xi(1, a) = \psi(1, a).$$

Aus der Annahme: für $i \leq n$, $n \geq 1$ sei schon

$$\xi(i, a) = \psi(i, a)$$

bewiesen, kann man auf

$$\xi(n+1, a) = \psi(n+1, a)$$

schließen wie folgt:

a) Sei zunächst $\mu_1(n+1) = 1$. Dann ist

$$\kappa(n+1) = 1; \quad \iota(1, b, c_1, c_2, c_3) = \gamma(b, c_1, c_3); \quad \lambda(n+1) = \mu(n+1) - 1;$$

$$\tau_1(n+1) = n+1,$$

also

$$\xi(n+1, a) = \gamma(\mu(n+1) - 1, \psi(0, a), \psi(n, a)) = \psi(n+1, a), \quad \text{q. e. d.}$$

b) Sei nun $\mu_1(n+1) = 3 \cdot 2^{\mu(n+1)-1}$. Dann ist

$$\kappa(n+1) = 2; \quad \iota(2, b, c_1, c_2, c_3) = \beta(b, c_1, c_2, c_3); \quad \lambda(n+1) = \mu(n+1) - 1;$$

$$\tau_1(n+1) = n+1 \quad \text{und} \quad \tau_2(n+1) = 3 \cdot 2^{\mu(n+1)-1} = \mu_1(n+1) \leq n+1,$$

also

$$\begin{aligned} \xi(n+1, a) &= \beta(\mu(n+1) - 1, \psi(0, a), \psi(n+1 - \mu_1(n+1), a), \psi(n, a)) \\ &= \psi(n+1, a), \end{aligned} \quad \text{q. e. d.}$$

c) Sei endlich $1 < \mu_1(n+1) < 3 \cdot 2^{\mu(n+1)-1}$. Dann werde zur Abkürzung

$$n_1 = \nu(\mu(n+1) - 1) + 1,$$

$$n_2 = \mu_1(n+1) - 1$$

gesetzt, so daß

$$n_1 + n_2 = n+1$$

ist. Ferner werde eine Funktion $\chi(k, a)$ durch die Rekursion

$$\chi(0, a) = \xi(n_1, a)$$

$$\begin{aligned} \chi(k+1, a) &= \iota(\kappa(k+1), \lambda(k+1), \chi(k+1 - \tau_1(k+1), a), \\ &\quad \chi(k+1 - \tau_2(k+1), a), \chi(k, a)) \end{aligned}$$

definiert. Gemäß dieser Rekursion ist $\chi(k, a) = \xi(k, \xi(n_1, a))$, da ja in der Rekursion (D_6) der Parameter a nur als Anfangswert vorkommt.

Andererseits ist nach (D_6)

$$\begin{aligned} \xi(n_1 + k, a) &= \iota(\kappa(n_1 + k), \lambda(n_1 + k), \xi(n_1 + k - \tau_1(n_1 + k), a), \\ &\quad \xi(n_1 + k - \tau_2(n_1 + k), a), \xi(n_1 + k - 1, a)). \end{aligned}$$

Gemäß der Definition von n_1 , n_2 , μ und μ_1 ist für $k = 1, 2, \dots, n_2$
 $\mu(n_1 + k) = \mu(n+1)$; $\mu_1(n_1 + k) = n_1 + k - \nu(\mu(n+1) - 1) = k+1$,
 und daher auf Grund der Voraussetzungen des Falles c)

$$1 < \mu_1(n_1 + k) \leq \mu_1(n+1) < 3 \cdot 2^{\mu(n+1)-1}.$$

Also ist $\kappa(n_1 + k) = \kappa(\mu_1(n_1 + k) - 1) = \kappa(k)$
und entsprechend

$$\lambda(n_1 + k) = \lambda(k); \quad \tau_1(n_1 + k) = \tau_1(k); \quad \tau_2(n_1 + k) = \tau_2(k),$$

folglich für $k = 1, 2, \dots, n_2$

$$\xi(n_1 + k, a) = \iota(\kappa(k), \lambda(k), \xi(n_1 + k - \tau_1(k), a), \xi(n_1 + k - \tau_2(k), a), \xi(n_1 + k - 1, a)).$$

Außerdem ist $\xi(n_1 + 0, a) = \xi(n_1, a)$.

Dies bedeutet aber, daß $\xi(n_1 + k, a)$, als Funktion von k , für $0 \leq k \leq n_2$ denselben Rekursionsgleichungen genügt, wie $\chi(k, a)$; also stimmen die beiden Funktionen insbesondere für $k = n_2$ überein. Somit ist

$$\begin{aligned} \xi(n + 1, a) &= \xi(n_1 + n_2, a) = \chi(n_2, a) = \xi(n_2, \xi(n_1, a)) \\ &= \xi(\mu_1(n + 1) - 1, \xi(\nu(\mu(n + 1) - 1) + 1, a)), \end{aligned}$$

und hieraus folgt auf Grund der Annahme $\xi(i, a) = \psi(i, a)$ für $i \leq n$, der Voraussetzung von c), und der letzten Gleichung aus (D_6) :

$$\xi(n + 1, a) = \psi(n + 1, a), \quad \text{q. e. d.}$$

Die Funktion $\varphi(n, a)$ wurde eben derart definiert, daß die Gleichung

$$\varphi(n, a) = \varphi(\nu(n), a)$$

bestehe. Das tatsächliche Bestehen dieser Gleichung kann ohne Schwierigkeiten verifiziert werden. Demnach ist auch

$$\varphi(n, a) = \xi(\nu(n), a),$$

und damit ist die Rekursivität von $\varphi(n, a)$ bewiesen.

20. In Nr. 15 wurde die spezielle eingeschachtelte Wertverlaufsrekursion (D_5) behandelt. Es macht keine Schwierigkeit, mit derselben Methode auch die allgemeine eingeschachtelte Wertverlaufsrekursion auf eine gewöhnliche eingeschachtelte Rekursion zurückzuführen.

Im ganzen ergibt sich somit, daß die Klasse der rekursiven Funktionen durch Zulassung der Wertverlaufsrekursion und der eingeschachtelten Rekursion nicht erweitert wird. —

Zum Schluß spreche ich den Herren P. Bernays (Göttingen) und L. Kalmár (Szeged) für mehrere Vereinfachungen meiner ursprünglichen Gedankengänge meinen Dank aus; dem letzteren besonders auch dafür, daß er meine Aufmerksamkeit auf die rekursiven Funktionen gelenkt hat.

(Eingegangen am 16. 4. 1934).

[Zusatz, 21. September 1934.] Auf Anregung des Herrn L. Kalmár (Szeged) habe ich den Beweis des § 2 weiter vereinfacht, indem ich die kombinatorischen Schwierigkeiten mit Hilfe des Satzes von der eindeutigen Primfaktorenzerlegung der Zahlen umgehe. Der vereinfachte Beweis wird in einer ungarischen Arbeit mit deutschem Auszug: „Zur Theorie der rekursiven Funktionen“ demnächst in den *Matematikai és Fizikai Lapok* (Budapest) erscheinen.